# Trou spectral (suite & fin)

$\mathbb{P}_g^{WP}\left(\lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \varepsilon\right) \xrightarrow[g\to\infty]{} 0$ quelques éléments supplémentaires de preuve

## 1) Le problème des "tangles"

Rappel : pour la fonction test $\varphi_L$ à support dans $[-L, L]$ où $L = A\log(g)$, $\lambda_1 = \frac{1}{4} + r_1^2$, $A \geq \frac{1}{\alpha+\varepsilon}$,

$$\mathbb{P}_g\left(\delta \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 - \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{4} + r_1\right)^M \widehat{\varphi_L}(r_1) \geq C_{\alpha,\varepsilon}\, e^{(\alpha+\varepsilon)L}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\delta^M e^{(\alpha+\varepsilon)L}}\, \mathbb{E}_g^{WP}\left(\sum_{\substack{T \\ \text{type top.}}} \sum_{\gamma\sim T} \ell(\gamma) e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \mathcal{D}^M \varphi_L(\ell(\gamma)) + O(g)\right)$$

Markov + formule des traces

$T = (S, c)$ tq $|\chi(S)| \leq 3A+1$

Pour $T = (S, c)$ fixé, $K$ entier, $|\chi(S)| \leq 3A+1$, $M = 2|\chi(S)| + 2K + 2$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\gamma\sim T} \ell(\gamma) e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \mathcal{D}^M \varphi_L(\ell(\gamma))\right] \overset{\text{intég. par parties avec } \mathcal{D}}{=} O(g) + O\left(\frac{e^{L\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}}{g^{K+1}}\right)$$

$$= o\left(e^{(\alpha+\varepsilon)L}\right) \quad \text{si } A = 2(K+2),\ \alpha = 1/(2(K+2))$$

→ l'IPP est analogue au "sidestepping lemma" de Joel Friedman.

<u>Q</u>: Somme sur tous les T ?

<u>Théorème</u>: "il y a vraiment un problème avec la méthode des traces quand on somme sur tous les T."

$$\forall F,\ \mathbb{E}_g\Big(\sum_{\text{tous les }\gamma} F(\ell(\gamma))\Big) = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{g^k} \int F(\ell)\, C_k^{all}(\ell)\, d\ell$$
$$+ O\left(\frac{1}{g^{K+1}} \|F(x)e^{x}\|_\infty\, e^{\eta L}\right)$$

(jusqu'ici c'est vrai)

<u>MAIS</u> $C_1^{all}$ n'est pas une fonction de Friedman-Ramanujan.

Preuve: si c'était le cas, l'approche précédente donnerait

$$\mathbb{P}_g\left(\delta < \lambda_1 < \frac{5}{72}\right) = O\left(\frac{1}{g^\alpha}\right) \quad \text{pour } 1<\alpha<2 \ (\text{ex: } \alpha = \tfrac{5}{4})$$

Or $\mathbb{P}(\lambda_1 \leq a) \geq \mathbb{P}(\ ^{a}) \asymp \frac{1}{g}\int_0^a \frac{\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\ell}\, d\ell \asymp \frac{a^2}{g}$

(contradiction)

<u>Tangles</u> (inspiré de Bordenave) : on fixe $\kappa > 0$ (petit) et $R$ (en pratique $R = \kappa \log g$).

Un tangle est :

- soit une géodésique périodique de longueur $\leq \kappa$
- soit un pantalon dont toutes les géodésiques de bord sont plus petites que $R$.

Fait :

$$\mathbb{P}_g(X \text{ contient un } (\kappa, R)\text{-tangle}) \leq \mathbb{E}_g(\#\text{ géod. périod.} \leq \kappa) + \mathbb{E}_g(\#\text{ pantalons de bord} \leq 3R)$$

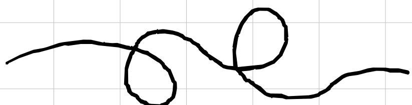
Or $\mathbb{E}_g(\#\text{ géod. périod.} \leq \kappa) \sim \kappa^2$ (ne tend pas vers 0 mais est très petit)

$$\mathbb{E}_g(\#\text{ pant. bord} \leq 3R) = O\left(\frac{1}{g} e^{\frac{3R}{2}}\right) = O\left(g^{\frac{3}{2}\kappa - 1}\right) \to 0$$

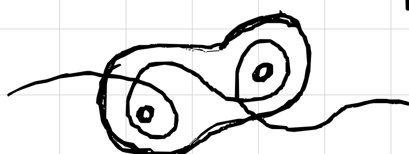
$TF_g(\kappa, R) \subset \mathcal{M}_g$ (TF = tangle-free : ne contient pas de tangle)

$$\mathbb{P}(TF_g(\kappa, R)) \underset{g \to \infty}{\geq} 1 - \kappa^2$$

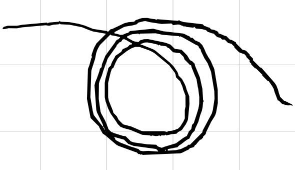
Explication du terme "tangle" :
si $X \in TF_g(\kappa, R)$, une géodes. de longueur $R = \kappa \log g$ ne peut pas faire ça :



Sinon on pourrait trouver un pantalon qui contredit l'hypothèse "tangle-free".



En revanche la géodésique peut faire ça en faisant au plus $\frac{R}{\kappa} = \log g$ tours :



On a alors

$$\mathbb{P}\left(\delta \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 + \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left\{\delta \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 + \varepsilon\right\} \cap TF_g(\kappa, R)\right) + \kappa^2 + O\left(g^{\frac{3\kappa-1}{2}}\right)$$

Par Markov + Selberg il vient

$$P\left(\delta \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 + \varepsilon\right) \leq \frac{1}{e^{(\alpha+\varepsilon)L}} \left( O(g) + \mathbb{E}_g\left( \sum_{T} \sum_{\gamma \sim T} \cdots \mathbb{1}_{TF_g(\kappa, R)} \right) \right)$$

→ $\gamma$ est de longueur $A \log g = \frac{A}{\kappa} \times \kappa \log g$

Ainsi, $\sum_{T} = \sum_{T \in \underbrace{Loc(\kappa, A, g)}}$

ensemble des types top. possibles pour une géodésique de longueur $\leq A \log g$ sur une surface sans tangle

Or $\# Loc(\kappa, A, g) = O\left(\log g^{\beta(\kappa, A)}\right)$

On peut écrire

fonction de Möbius

$$\mathbb{1}_{TF(\kappa,R)}(X) = -\sum_{\tau \subset X} \mu^{\kappa, R}(\tau)$$

$\tau$ union disjointe de géod. périodiques simples et de surfaces à bords géodésiques

$\mu^{\kappa,R}$ est définie sur l'union de tous les espaces de modules de surfaces à bords géodésiques et de courbes ou multicourbes simples.

- $\mu^{\kappa,R}(\tau) \neq 0 \Rightarrow \tau$ est remplie par des tangles
- $\mu^{\kappa,R}(\emptyset) = -1$

$$\mathbb{E}_g^{WP}\left[\sum_{\gamma \sim T} \sum_{\tau} F_L(\ell(\gamma))\mu(\tau)\right]$$
$$= \int_0^\infty F_L(\ell)\, V_g^{T,\mu}(\ell)\, d\ell$$

dvp asymptotique dont les coef sont Friedman-Ramanujan

⚠ $\mu$ n'est pas très explicite mais elle est unique et on sait la borner.

Parenthèse : fonction de Möbius en théorie des nombres

$P \subset \mathcal{P}$ ensemble de nombres premiers ($\sim$ tangles).

$\exists$ une unique fonction $\mu$ tq $\mu(1) = -1$
et

$$\begin{cases} 0 = \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \mu(d) & \text{si } n \text{ n'est divisible par aucun } p \in P \\ 1 = \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \mu(d) & \text{si } \exists\, p \in P,\ p \mid n \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} -1 = \sum\limits_{d \mid n} \mu(d) & \text{si } p \nmid n\ \forall p \in P \\ 0 = \sum\limits_{d \mid n} \mu(d) & \text{si } \exists p \in P,\ p \mid n. \end{cases}$$

Existence & unicité de $\mu$ : par récurrence sur $n$.

$\mu(n) \neq 0 \Rightarrow n$ est un produit de $p_i \in P$

$\mu(p_{i_1} \cdots p_{i_j}) = (-1)^{j+1}$ si $p_{i_1}, \dots p_{i_j} \in P$ tous distincts

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = 0$$

Si on prend $P = \mathcal{P}$, $\mu$ est l'opposée de la fonction de Möbius habituelle.

Fin de la parenthèse.

## 2) La propriété de Friedman-Ramanujan

$T = (S, c)$ fixé, $S$ de genre $g'$ avec $n$ composantes de bord.

$$\int_0^\infty F(\ell)\, V_g^T(\ell)\, d\ell = \mathbb{E}_g\Big(\sum_{\gamma \sim T} F(\ell(\gamma))\Big)$$

$$= \sum_{k=|\chi(S)|}^{K} \frac{1}{g^k} \int_0^\infty F(\ell)\, \underbrace{c_k^T(\ell)}_{\text{function F-R ?}}\, d\ell + \text{Reste}$$

Pour $k = |\chi(S)|$, le terme est

$$\frac{1}{m(T)} \underbrace{\int_{\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)>0} \prod_{i=1}^{n} \sinh\left(\frac{x_i}{2}\right) dx_i}_{\text{Mirzakhani-Petri}} \int_{Y \in \mathcal{T}_{\vec{x}}(S)} F(\ell_Y(c))\, d\mu^{WP}(Y) \qquad (*)$$

Les termes suivants ont une forme analogue avec des cosh et des polynômes.

Fonction de Friedman-Ramanujan "faible" :

$$f(\ell) = p(\ell)e^{\ell} + \underbrace{r(\ell)}_{O(\ell^c e^{\ell/2})}$$

avec $\displaystyle\int_n^{n+1} r(\ell)\,d\ell = O(n^c e^{n/2})$

Or $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \sinh\left(\frac{\ell_i}{2}\right) \leq e^{\sum \frac{x_i}{2}} \leq e^{\frac{\ell(\partial \gamma)}{2}}$

<u>Rappels</u> : 1) $\ell(\partial\gamma) \leq 2\, \ell_Y(c)$

2) $\ell(\partial\gamma) \leq \ell_Y(c) + \displaystyle\sum_{\substack{I \text{ portion} \\ \text{simple essentielle} \\ \text{de } c}} \ell(I)$

3) <u>Si c</u> est doublement remplissante, $\ell(\partial\gamma) \leq \ell_Y(c)$.

<u>Proposition</u> : Si c est doublement remplissante,

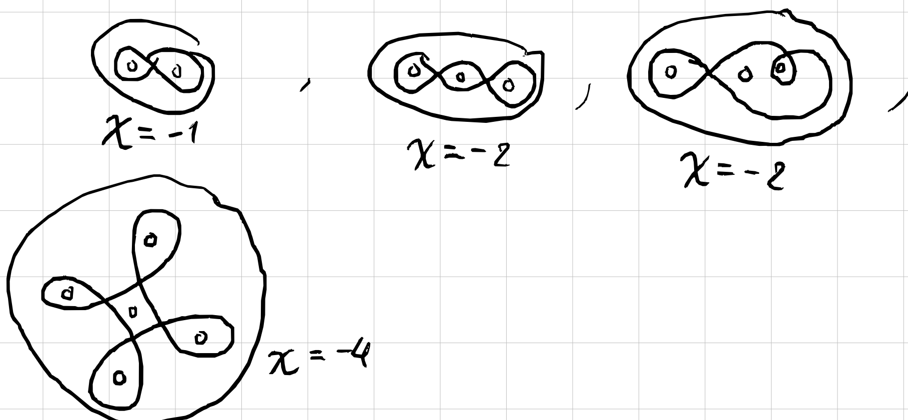
$(*) \leq e^{L/2} L^{\alpha}$ si $F$ à support dans $[-L, L]$

$\rightarrow$ $C_k^T(\ell) = 0 + O(\ell^{\alpha} e^{\ell/2})$ est bien F-R.

On va se préoccuper du pire cas : si aucune composante de $\Sigma \setminus c$ n'est un disque.

→ " 8 généralisés ".

ex :




Si $c$ est un 8 généralisé avec $r$ intersections et qui remplit $\Sigma$, alors $|\chi(\Sigma)| = r$.

$$c_k^T(\ell) = \int_{(\vec{x}, Y) \in \mathcal{T}_*(\Sigma) : \ell_Y(c) = \ell} \prod_{i=1}^n \sinh\left(\frac{x_i}{2}\right) \frac{d\vec{x}\, d\mu^{WP}(Y)}{d\ell}$$

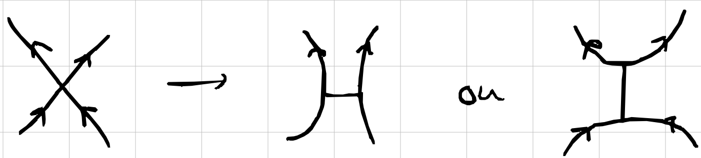
mesure désintégrée sur l'hypersurface $\ell_Y(c) = \ell$ de $\mathcal{T}_*(\Sigma)$

où $\mathcal{T}_*(\Sigma) = \{(\vec{x}, Y) : Y \in \mathcal{T}_{\vec{x}}(\Sigma)\}$

✓

de dimension $3|\chi(\Sigma)|$.

Coordonnées adaptées à la courbe $c$ ; on opère les désingularisat°




par ex ;

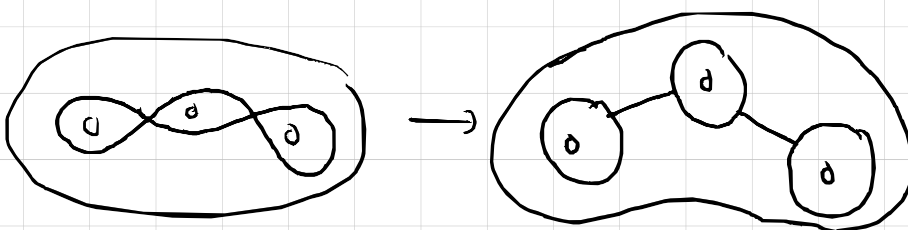
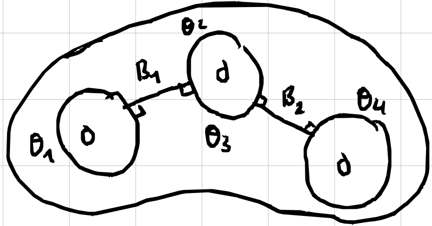


diagramme $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$
multicourbe + $B_1, \dots, B_r$ segments

Si on munit $S$ d'une métrique $(\vec{x}, Y)$ on peut prendre
$\beta_i$ = représentants géodésiques
$B_i$ = orthogéodésiques

On pose $L_i = \ell(B_i)$ et $\theta_i$ longueurs des segments de $\beta_j$ délimités par les $B_i$.

ex:




On obtient $3r$ coordonnées $L_1, \dots L_r, \theta_1, \dots, \theta_{2r}$.

**Thm:** $$\prod_{i=1}^{n} \sinh\left(\frac{x_i}{2}\right) d\vec{x}.\, d\mu^{WP}(Y)$$
$$= 2^r \prod_{i=1}^{N} \sinh^2 \underbrace{\left(\frac{\ell(\beta_i)}{2}\right)}_{\text{facile à exprimer comme somme de } \theta_i} \prod_{i=1}^{r} \sinh(L_i) \prod_{i=1}^{r} d\ell_i \prod_{i=1}^{2r} d\theta_i$$

**NB:** $\sinh^2\left(\frac{\ell(\beta_i)}{2}\right)$ fonct° de Friedman-Ramanujan

**Thm:** formule explicite:

$$2\cosh\left(\frac{\ell_Y(c)}{2}\right) = \sum_{\substack{\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{2r}) \in \{-1,1\}^{2r} \\ \text{tq } \prod \varepsilon_i = 1}} \cosh\left(\sum_{i=1}^{r} \overbrace{\alpha_i(\varepsilon)}^{= \pm 1,\ \pm\frac{1}{2} \text{ ou } 0 \text{ selon la combinatoire de la courbe}} L_i\right)$$
$$\times\, hyp_{\vec{\varepsilon}}\left(\frac{\theta_1}{2}, \dots, \frac{\theta_{2r}}{2}\right)$$

Notations: $\mathrm{hyp}_+(x) = \cosh(x)$
$\mathrm{hyp}_-(x) = \sinh(x)$

$$\mathrm{hyp}_{\vec{\varepsilon}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{hyp}_{\varepsilon_i}(x_i) \quad \text{pour } \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

NB: $\left.\begin{array}{l} \alpha_i(-1,-1,\dots,+1) = 1 \\ \alpha_i(0,\dots,0) = 0 \end{array}\right) \forall i.$

Donc

$$2\cosh\left(\frac{\ell_Y(c)}{2}\right) = \prod_{i=1}^{2r} \cosh\left(\frac{\theta_i}{2}\right) + \prod_{i=1}^{2r} \sinh\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cosh\left(\sum_{i=1}^{r} L_i\right)$$

+ autres termes

À partir de là, on peut mq quand $\theta_i \to \infty$ et $L_i \to \infty$,

$$\ell_Y(c) = \sum_{i=1}^{2r} \theta_i + 2\sum_{i=1}^{r} L_i + \text{erreurs explicites}$$

$$c_k^T(\ell) = \int_{\substack{\sum \theta_i + 2\sum L_i = \ell \\ + \text{ erreurs}}} \prod_{i=1}^{N} \sinh\left(\frac{\ell(\beta_i')}{2}\right) \prod_{i=1}^{r} \sinh(L_i') \frac{\prod dL_i \, d\theta_i}{d\ell}$$

<u>Prop</u>: Si $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Friedman-Ramanujan, alors

$f_1 * f_2$ est aussi Friedman-Ramanujan,

où $f_1 * f_2(\ell) = \int_{t_1+t_2=\ell} f_1(t_1) f_2(t_2) \frac{dt_1 dt_2}{d\ell}$ convolution.

<u>Demo</u>: exercice.